CONCURSUL DE MATEMATICĂ " LOUIS FUNAR "

Soluții și barem de corectare

Clasa a-IV-a

10 puncte din oficiu

Subiectul I

1	2	3	4	5	6
b	a	c	c	c	d

Subiectul II

1. Cazul I: 1 a, 2 a (altfel jocul se oprește), 3 r (nu avem trei bile consecutive de aceeași culoare), 4 a (altfel jocul se oprește)..8 p

   Avem două subcazuri :

   5a implică 6r (altfel avem trei bile consecutive de aceeași culoare)................................ 5p

   Sau

   5r implică 6a (altfel jocul se oprește).. 5p

   Cazul II: Este identic cu cazul I numai că a se schimbă cu r................................ 8p

   Jocul se oprește la bila a 10a.. 4p

2. $\overline{ab} = 7 \cdot (a + b)$..10p

   $a = 2 \cdot b$..8p

   $a \in \{2, 4, 6, 8\}$..4p

   $b \in \{1, 2, 3, 4\}$..4p

   $\overline{ab} \in \{21, 42, 63, 84\}$..4p

Nota : orice altă soluție corectă este notată cu punctajul maxim

CONCURSUL DE MATEMATICĂ " LOUIS FUNAR "

Soluții și barem de corectare

Clasa a-V-a

10 puncte din oficiu

Subiectul I

1	2	3	4	5	6
a	b	d	a	b	b

Subiectul II

1. Numărul 3^x este număr impar oricare ar fi x număr natural 2p
   Numărul 6^y și 8^z este număr par oricare ar fi $y \neq 0$ și $z \neq 0$....................2p
   Deoarece într-un membru avem un număr par și în celălalt un număr impar, avem că $y \neq 0$ sau $z \neq 0$....................4p
   Dacă y = 0 atunci $0 < z < 3$, ecuația nu are soluții....................4p
   Dacă z = 0 atunci $y \in \{1,2,3\}$....................2p
   Dăm valori lui y și obținem că y = 3 și x =3....................4p
   x =3, y = 3, z = 0....................2p

2. a.
   $A = 1008 \cdot 2016 \cdot (2016^2 + 1) \Rightarrow u(A) = 6$....................6p
   $B = 1008 \cdot 2016 \cdot (2016 \cdot 1008 + 1) \Rightarrow u(B) = 2$....................6p
   b.
   $B - A = (1008 \cdot 2016)^2$....................8p

3. A suma numerelor de pe cartonașele lui Alex....................2p
   B suma numerelor de pe cartonașele lui Bogdan....................2p
   Cea mai mică valoare a lui B este $1 + 2 + 3 + \cdots + 15 = 120$....................2p
   Cea mai mică valoare a lui A este $3 \cdot 120 = 360$....................2p
   Cea mai mare valoare a lui A este $17 + 18 + 19 + \cdots + 31 = 360$....................2p
   A nu poate fi decât 360 și B nu poate fi decât 120....................2p
   Alex alege 17. 18, 19, ..., 31....................2p
   Bogdan alege 1, 2, 3, ..., 15....................2p
   Numărul scris pe cartonașul rămas este n= 16....................4p

Nota : orice altă soluție corectă este notată cu punctajul maxim

CONCURSUL DE MATEMATICĂ " LOUIS FUNAR "

Soluții și barem de corectare

Clasa a-VI-a

10 puncte din oficiu

Subiectul I

1	2	3	4	5	6
d	a	b	c	a	c

Subiectul II

1. a) $2\cdot s = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2015} + 2^{2016}$ 4p

$2\cdot s - s = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2015} + 2^{2016} - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2015})$ 4p

$s = 2^{2016} - 1$ 4p

b) Ultima cifra a lui 2^{2016} este 6 ....4p

Deci ultima cifra a lui s este 5 $\Rightarrow$ s este divizibil cu 5 ....4p

2. Daca $n = 4k$, atunci $u(7^n) = 1 \Rightarrow u(a) = 7 \Rightarrow$ a nu este patrat perfect 4p

Daca $n = 4k+1$, atunci $u(7^n) = 7 \Rightarrow u(a) = 3 \Rightarrow$ a nu este patrat perfect..4p

Daca $n = 4k+2$, atunci $a = 7^{4k+2} - 4 = 7^2 \cdot (7^4)^k - 4 = 7^2 \cdot 2401^k - 4 = 7^2 \cdot (M_{100} + 1)^k - 4 =$ $M_{100} + 45$ 4p

In acest caz $5 \mid a$ si $25 \nmid a \Rightarrow$ a nu este patrat perfect 2p

Daca $n = 4k + 3$, atunci $a = 7^3 \cdot (7^4)^k - 4 = 7^3 \cdot (M_{100} + 1)^k - 4 = M_{100} + 7^3 - 4 = M_{100} + 339$

$\Rightarrow$ultimele două cifre ale lui a sunt impare..2p

Un pătrat perfect nu poate avea ultimele două cifre impare..2p

Cum ultimele două cifre ale lui a sunt impare, deducem ca a nu este patrat perfect........................2p

3. Fie A, B, C, D, E si F cele sase puncte. Din A pornesc 5 segmente colorate cu doua culori.............. 4p

Conform principiului lui Dirichlet vor exista cel putin trei segmente de aceeasi culoare 4p

Sa presupunem ca acestea ar fi [AB], [AC], [AD] si ca toate sunt rosii 4p

Daca unul din segmentele [BC], [CD] sau [BD] este rosu, problema se incheie 4p

Daca toate segmentele [BC], [CD], [BD] sunt negre, atunci iarasi problema este rezolvata 4p

Nota : orice altă solutie corectă este notată cu punctajul maxim

CONCURSUL DE MATEMATICĂ " LOUIS FUNAR "

Soluții și barem de corectare

Clasa a-VII-a

10 puncte din oficiu

Subiectul I

1	2	3	4	5	6
b	d	c	a	a	b

Subiectul II

1. Fie N mijlocul lui (BD)..2p
   MN = $\frac{DC}{2}$..2p
   MP = $2 \cdot MN$..2p
   $m(\angle PNM) = 90^0$..2p
   P mijlocul lui (AB)..2p
   $m(\angle ACB) = m(\angle PMB) = 60^0$..2p
   $m(\angle DAC) = m(\angle NPM) = 30^0$..4p
   $m(\angle BAC) = 90^0$..2p
   $m(\angle ABC) = 30^0$..2p

2. $S = x \cdot \left(\frac{2}{2\cdot3} + \frac{2}{3\cdot4} + \frac{2}{4\cdot5} + \cdots .. + \frac{2}{2015\cdot2016}\right) \in Z$..4p
   Aplicarea formulei $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$..6p
   $S = \frac{x\cdot1007}{1008} \in Z$..6p
   Finalizarea..4p

3. Soluția problemei este n=5..2p
   Numerotăm vârfurile octogonului în ordine, de la 1 la 8..2p
   n =4 nu convine, pentru că dacă colorăm vârfurile 1, 2, 4 şi 5 nu se formează nici un triunghi isoscel cu vârfurile roşii..2p
   Presupunem prin reducere la absurd , că se pot colora cinci vârfuri ale octogonului fără să se formeze vreun triunghi cu vârfurile roşii..2p
   Datorită simetriei putem considera ca vârful 1 este roşu..2p
   Din perechile (2, 8), (3, 7) şi (4, 6) cel mult un vârf este roşu , deci tot 5 este tot vârf roşu (în caz contrar, sunt roşii cel mult 4 vârfuri).. 2p
   3 nu poate fi roşu (ar apărea triunghiul isoscel 135)..2p
   7 nu poate fi roşu (ar apărea triunghiul isoscel 175)..2p
   Din perechea (3, 7) nu se alege nici un vârf, adică rămân cel mult patru vârfuri roşii.
   Contradicție..2p
   Finalizarea..2p

Nota : orice altă soluție corectă este notată cu punctajul maxim

CONCURSUL DE MATEMATICĂ " LOUIS FUNAR "

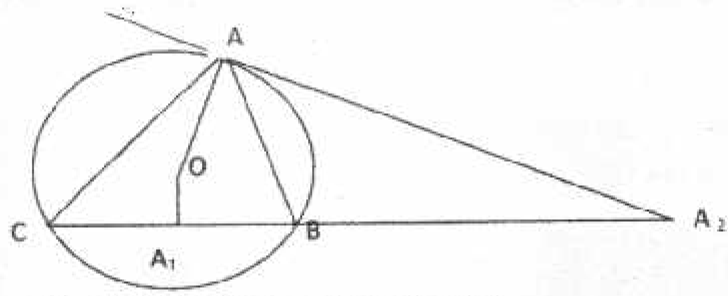
Soluții și barem de corectare
Clasa a-VIII-a
10 puncte din oficiu
Subiectul I

1	2	3	4	5	6
c	b	c	b	c	a

Subiectul II

1. Egalitatea se mai scrie : $(x-1)^2+(2\cdot y+1)^2=9$ 2p
Deducem ca $(x-1)^2 \le 9$ si $(2\cdot y+1)^2 \le 9$ 4p
Deci $|x-1| \le 3$ si $|2\cdot y+1| \le 3$ 4p
Asadar $-2 \le x \le 4$ si $-2 \le y \le 1$ 4p
$-6 \le 3\cdot x \le 12$ si $-4 \le 2\cdot y \le 2$ 4p
Prin adunarea acestor ultime doua inegalitati se obtine concluzia problemei 2p

2.



Tangenta in A la cercul circumscris triunghiului ABC taie pe BC in punctul A_2 .... 2p
Patrulaterul AOA_1A_2 este inscriptibil deoarece $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle A_1) = 180°$ 2p
Centrul cercului circumscris triunghiului AOA_1 (pe care il notam cu O_1) va fi la mijlocul lui $[OA_2]$ 1p
Analog se considera punctele B_2, C_2, O_2 si O_3 .... 1p
Punctele O_1, O_2, O_3 sunt coliniare daca si numai daca punctele A_2, B_2, C_2 sunt coliniare 2p
Deci este suficient sa aratam ca punctele A_2, B_2, C_2 sunt coliniare 2p
Triunghiurile BA_2A si AA_2C sunt asemenea (deoarece au doua perechi de unghiuri congruente) 2p
Deci $\frac{A_2B}{A_2A}=\frac{AB}{CA}=\frac{A_2A}{A_2C} \Longrightarrow A_2B=\frac{AB\cdot A_2A}{CA}$ si $A_2C=\frac{AC\cdot A_2A}{AB} \Longrightarrow \frac{A_2B}{A_2C}=\frac{AB^2}{AC^2}$ 2p
Analog $\frac{B_2C}{B_2A}=\frac{BC^2}{BA^2}$ si $\frac{C_2A}{C_2B}=\frac{CA^2}{CB^2}$ 2p
Prin inmultirea ultimelor trei egalitati obtinem ca $\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=1$ 2p
Conform reciprocei teoremei lui Menelaos deducem ca punctele A_2, B_2 si C_2 sunt coliniare 2p

3. Consideram C = {1, a, b}, unde a si b sunt din A, distincte si diferite de 1 .... 2p
Egalitatea din enunt devine : $a\cdot b = \frac{n\cdot(n+1)}{2} - a - b - 1$ 2p
$(1+a)\cdot(1+b) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ 2p
Daca $n = 2\cdot k$, vom considera $a = k-1$ si $b = 2\cdot k$ 4p
Cum $k \ge 3$, deducem ca a si b sunt distincte si diferite de 1 .... 2p
Daca $n = 2\cdot k + 1$, vom considera ca $a = k$ si $b = 2\cdot k$ 4p
Cum $k \ge 3$, deducem ca a si b sunt distincte si diferite de 1 .... 4p

Nota : orice altă soluție corectă este notată cu punctajul maxim